BÀI GIẢNG – NHỊ THỨC NEWTƠN

PHẦN A. Áp dụng đạo hàm vào bài toán nhị thức NewTơn

Dấu hiệu nhận biết:

Các hệ số đứng trước tổ hợp và lũy thừa tăng dần từ 1 đến n (hoặc giảm từ n đến 1) (không kể dấu).

Hai khai triển thường dùng:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^kx^k + \dots + C_n^nx^n \quad (1)$$

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 - \dots + (-1)^k C_n^kx^k + \dots + (-1)^n C_n^nx^n \quad (2)$$

i) Đạo hàm 2 vế của (1) hoặc (2).

ii) Cộng hoặc trừ (1) và (2) sau khi đã đạo hàm rồi thay số thích hợp.

Ví dụ 7. Tính tổng $S = C_{30}^1 - 2.2C_{30}^2 + 3.2^2C_{30}^3 - \dots + 29.2^{28}C_{30}^{29} - 30.2^{29}C_{30}^{30}$.

Giải

Ta có khai triển:

$$(1+x)^{30} = C_{30}^0 + C_{30}^1x + C_{30}^2x^2 + \dots + C_{30}^{29}x^{29} + C_{30}^{30}x^{30} \quad (1)$$

Đạo hàm 2 vế của (1) ta được: $C_{30}^1 + 2C_{30}^2x + \dots + 29C_{30}^{29}x^{28} + 30C_{30}^{30}x^{29} = 30(1+x)^{29} \quad (2)$

Thay x = – 2 vào (2) ta được: $C_{30}^1 - 2.2C_{30}^2 + 3.2^2C_{30}^3 - \dots + 29.2^{28}C_{30}^{29} - 30.2^{29}C_{30}^{30} = 30(1-2)^{29}$.

Vậy $S = -30$.

Ví dụ 8. Rút gọn tổng $S = C_{30}^1 + 3.2^2C_{30}^3 + 5.2^4C_{30}^5 + \dots + 27.2^{26}C_{30}^{27} + 29.2^{28}C_{30}^{29}$

Giải

Ta có khai triển: $(1+x)^{30} = C_{30}^0 + C_{30}^1x + C_{30}^2x^2 + \dots + C_{30}^{29}x^{29} + C_{30}^{30}x^{30} \quad (1)$

Đạo hàm 2 vế của (1) ta được: $C_{30}^1 + 2C_{30}^2x + \dots + 29C_{30}^{29}x^{28} + 30C_{30}^{30}x^{29} = 30(1+x)^{29} \quad (2)$

Thay x = 2 và x = – 2 lần lượt vào (2) ta được:

$$C_{30}^1 + 2.2C_{30}^2 + 3.2^2C_{30}^3 + \dots + 29.2^{28}C_{30}^{29} + 30.2^{29}C_{30}^{30} = 30(1+2)^{29} \quad (3)$$

$$C_{30}^1 - 2.2C_{30}^2 + 3.2^2C_{30}^3 - \dots + 29.2^{28}C_{30}^{29} - 30.2^{29}C_{30}^{30} = 30(1-2)^{29} \quad (4)$$

Cộng hai đẳng thức (3) và (4) ta được:

$$2(C_{30}^1 + 3.2^2C_{30}^3 + 5.2^4C_{30}^5 + \dots + 27.2^{26}C_{30}^{27} + 29.2^{28}C_{30}^{29}) = 30\left(3^{29} - 1\right)$$

Vậy $S = 15\left(3^{29} - 1\right)$.

Ví dụ 9. Rút gọn tổng $S = 2008C_{2007}^0 + 2007C_{2007}^1 + 2006C_{2007}^2 + \dots + 2C_{2007}^{2006} + C_{2007}^{2007}$.

Giải

Ta có khai triển:

$$(x+1)^{2007} = C_{2007}^0x^{2007} + C_{2007}^1x^{2006} + C_{2007}^2x^{2005} + \dots + C_{2007}^{2006}x + C_{2007}^{2007}$$

Nhân 2 vế (1) với x ta được:

$$x(x+1)^{2007} = C_{2007}^0x^{2008} + C_{2007}^1x^{2007} + C_{2007}^2x^{2006} + \dots + C_{2007}^{2006}x^2 + C_{2007}^{2007}x \quad (2)$$

Đạo hàm 2 vế của (2) ta được:

$$2008C_{2007}^{0}x^{2007}+2007C_{2007}^{1}x^{2006}+2006C_{2007}^{2}x^{2005}+...+2C_{2007}^{2006}x+C_{2007}^{2007}$$

$$=(1+2008x)\left(x+1\right)^{2006}\quad (3)$$

Thay x = 1 vào (3) ta được: $2008C_{2007}^{0}+2007C_{2007}^{1}+2006C_{2007}^{2}+...+2C_{2007}^{2006}+C_{2007}^{2007}=2009.2^{2006}$.

Cách khác:

Ta có khai triển:

$$\left(x+1\right)^{2007}=C_{2007}^{0}x^{2007}+C_{2007}^{1}x^{2006}+C_{2007}^{2}x^{2005}+...+C_{2007}^{2006}x+C_{2007}^{2007}\qquad\left(1\right)$$

Đạo hàm 2 vế của (1) ta được:

$$2007C_{2007}^{0}x^{2006}+2006C_{2007}^{1}x^{2005}+2005C_{2007}^{2}x^{2004}+...+2C_{2007}^{2005}x+C_{2007}^{2006}=2007\left(x+1\right)^{2006}\ \left(2\right)$$

Thay x = 1 vào (1) và (2) ta được:

$$C_{2007}^{0}+C_{2007}^{1}+C_{2007}^{2}+...+C_{2007}^{2006}+C_{2007}^{2007}=2^{2007}\left(3\right)$$

$$2007C_{2007}^{0}+2006C_{2007}^{1}+2005C_{2007}^{2}+...+C_{2007}^{2006}=2007.2^{2006}\ \ \left(4\right)$$

Cộng (3) và (4) ta được: $2008C_{2007}^{0}+2007C_{2007}^{1}+2006C_{2007}^{2}+...+2C_{2007}^{2006}+C_{2007}^{2007}=2009.2^{2006}$.

Vậy $S=2009.2^{2006}$

Ví dụ 10. Cho tổng $S=2C_{n}^{0}+3C_{n}^{1}+4C_{n}^{2}+...+(n+1)C_{n}^{n-1}+(n+2)C_{n}^{n}$

với $n\in\mathbb{Z}^{+}$. Tính n, biết $S=320$.

<u>Giải</u>

Ta có khai triển:

$$\left(1+x\right)^{n}=C_{n}^{0}+C_{n}^{1}x+C_{n}^{2}x^{2}+...+C_{n}^{n-1}x^{n-1}+C_{n}^{n}x^{n}\quad\left(1\right)$$

Nhân 2 vế (1) với x^2 ta được: $C_{n}^{0}x^{2}+C_{n}^{1}x^{3}+C_{n}^{2}x^{4}+...+C_{n}^{n-1}x^{n+1}+C_{n}^{n}x^{n+2}=x^{2}\left(1+x\right)^{n}\ \left(2\right)$

Đạo hàm 2 vế của (2) ta được:

$$2C_{n}^{0}x+3C_{n}^{1}x^{2}+4C_{n}^{2}x^{3}+...+(n+1)C_{n}^{n-1}x^{n}+(n+2)C_{n}^{n}x^{n+1}=2x\left(1+x\right)^{n}+nx^{2}(1+x)^{n-1}\left(3\right)$$

Thay x = 1 vào (3) ta được:

$$2C_{n}^{0}+3C_{n}^{1}+4C_{n}^{2}+...+(n+1)C_{n}^{n-1}+\ (n+2)C_{n}^{n}=(4+n).2^{n-1}\ \left(4\right).$$

$$S=320\Leftrightarrow(4+n).2^{n-1}=320\Rightarrow n=6.$$

Cách khác:

Ta có khai triển:

$$\left(1+x\right)^{n}=C_{n}^{0}+C_{n}^{1}x+C_{n}^{2}x^{2}+...+C_{n}^{n-1}x^{n-1}+C_{n}^{n}x^{n}\ \left(1\right)$$

Đạo hàm 2 vế của (1) ta được:

$$C_{n}^{1}+2C_{n}^{2}x+3C_{n}^{3}x^{2}+...+nC_{n}^{n}x^{n-1}=n\left(1+x\right)^{n-1}\left(2\right)$$

Thay x = 1 vào (1) và (2) ta được:

$$C_{n}^{0}+C_{n}^{1}+C_{n}^{2}+C_{n}^{3}+...+C_{n}^{n-1}+C_{n}^{n}=2^{n}\left(3\right)$$

$$C_{n}^{1}+2C_{n}^{2}+3C_{n}^{3}+...+(n-1)C_{n}^{n-1}+nC_{n}^{n}=n.2^{n-1}\ \left(4\right)$$

Nhân (3) với 2 rồi cộng với (4) ta được:

$2C_n^0 + 3C_n^1 + 4C_n^2 + ... + (n+1)C_n^{n-1} + (n+2)C_n^n = (4+n).2^{n-1}$.

$S = 320 \Leftrightarrow (4+n).2^{n-1} = 320$.

Vậy $n = 6$.

2.2. Đạo hàm cấp 2

Dấu hiệu nhận biết:

Các hệ số đứng trước tổ hợp và lũy thừa tăng (giảm) dần từ 1.2 đến (n–1).n hoặc tăng (giảm) dần từ 1^2 đến n^2 (không kể dấu).

Xét khai triển: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + ... + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n \ (1)$

Đạo hàm 2 vế của (1) ta được: $C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 + 4C_n^4x^3 + ... + nC_n^nx^{n-1} = n(1+x)^{n-1} \ (2)$

i) Tiếp tục đạo hàm 2 vế của (2) ta được:

$1.2C_n^2 + 2.3C_n^3x + 3.4C_n^4x^2 + ... + (n-1)nC_n^nx^{n-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2} \quad (3)$

ii) Nhân x vào 2 vế của (2) ta được:

$C_n^1x + 2C_n^2x^2 + 3C_n^3x^3 + 4C_n^4x^4 + ... + nC_n^nx^n = nx(1+x)^{n-1} \ (4)$

Đạo hàm 2 vế của (4) ta được:

$1^2C_n^1 + 2^2C_n^2x + 3^2C_n^3x^2 + ... + n^2C_n^nx^{n-1} = n(1+nx)(1+x)^{n-2} \ (5)$

Ví dụ 11. Tính tổng $S = 1.2C_{16}^2 - 2.3C_{16}^3 + 3.4C_{16}^4 - ... - 14.15C_{16}^{15} + 15.16C_{16}^{16}$.

<u>Giải</u>

Ta có khai triển:

$(1+x)^{16} = C_{16}^0 + C_{16}^1x + C_{16}^2x^2 + C_{16}^3x^3 + ... + C_{16}^{15}x^{15} + C_{16}^{16}x^{16} \quad (1)$

Đạo hàm 2 vế của (1) ta được:

$C_{16}^1 + 2C_{16}^2x + 3C_{16}^3x^2 + ... + 15C_{16}^{15}x^{14} + 16C_{16}^{16}x^{15} = 16(1+x)^{15} \quad (2)$

Đạo hàm 2 vế của (2) ta được:

$1.2C_{16}^2 + 2.3C_{16}^3x + 3.4C_{16}^4x^2 + ... + 15.16C_{16}^{16}x^{14} = 240(1+x)^{14} \ (3)$

Thay x = – 1 vào đẳng thức (3) ta được:

$1.2C_{16}^2 - 2.3C_{16}^3 + 3.4C_{16}^4 - ... - 14.15C_{16}^{15} + 15.16C_{16}^{16} = 0$.

Vậy S = 0.

Ví dụ 12. Rút gọn tổng $S = 1^2C_{2007}^1 + 2^2C_{2007}^2 + 3^2C_{2007}^3 + ... + 2006^2C_{2007}^{2006} + 2007^2C_{2007}^{2007}$.

<u>Giải</u>

Ta có khai triển:

$(1+x)^{2007} = C_{2007}^0 + C_{2007}^1x + C_{2007}^2x^2 + ... + C_{2007}^{2006}x^{2006} + C_{2007}^{2007}x^{2007} \quad (1)$

Đạo hàm 2 vế của (1) ta được:

$C_{2007}^1 + 2C_{2007}^2x + 3C_{2007}^3x^2 + ... + 2007C_{2007}^{2007}x^{2006} = 2007(1+x)^{2006} \ (2)$

Nhân x vào 2 vế của (2) ta được:

$C_{2007}^1x + 2C_{2007}^2x^2 + 3C_{2007}^3x^3 + ... + 2006C_{2007}^{2006}x^{2006} + 2007C_{2007}^{2007}x^{2007} = 2007x(1+x)^{2006} \ (2)$

Đạo hàm 2 vế của (3) ta được:

$$1^2C_{2007}^1+2^2C_{2007}^2x+3^2C_{2007}^3x^2+\ldots+2006^2C_{2007}^{2006}x^{2005}+2007^2C_{2007}^{2007}x^{2006}=2007(1+2007x)(1+x)^{2005}\quad(4)$$

Thay x = 1 vào đẳng thức (4) ta được

$$1^2C_{2007}^1+2^2C_{2007}^2+3^2C_{2007}^3+\ldots+2007^2C_{2007}^{2007}=2007.2008.2^{2005}.$$

Vậy $S=2007.2008.2^{2005}$.

Bài 1a Chứng minh rằng: $3C_n^0+4C_n^1+\ldots+(n+3)C_n^n=2^{n-1}(6+n)$ (C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử.)

HD Ta có $(1+x)^n=C_n^0+xC_n^1+\ldots+x^nC_n^n$ nhân cả 2 vế với x^3 ta được $x^3(1+x)^n=x^3C_n^0+x^4C_n^1+\ldots+x^{n+3}C_n^n$ lấy đạo hàm hai vế và thay x = 1 ta có điều phải chứng minh.

Bài 1b Tính tổng $S=1^2C_{2001}^1 2^{2010}+2^2C_{2001}^2 2^{2009}+3^2C_{2001}^3 2^{2008}+\ldots+2011^2C_{2001}^{2011}2^0$

$$(1+x)^{2011}=C_{2011}^0+C_{2011}^1x+C_{2011}^2x^2+C_{2011}^3x^3+\cdots+C_{2011}^{2011}x^{2011}\quad(1)$$

Lấy đạo hàm hai vế (1) ta được:

$$2011(1+x)^{2010}=C_{2011}^1+2xC_{2011}^2+3x^2C_{2011}^3+\cdots+2011x^{2010}C_{2011}^{2011}$$

nhân hai vế với x ta được:

$$2011x(1+x)^{2010}=xC_{2011}^1+2x^2C_{2011}^2+3x^3C_{2011}^3+\cdots+2011x^{2011}C_{2011}^{2011}\quad(2)$$

Lấy đạo hàm hai vế (2) ta được

$$2011\left((1+x)^{2010}+2010x(1+x)^{2019}\right)=$$
$$C_{2011}^1+2^2xC_{2011}^2+3^2x^2C_{2011}^3+\cdots+2011^2x^{2010}C_{2011}^{2011}\quad(3)$$

Thay x=1 vào hai vế của (3) ta được:

$$2011\left(2^{2010}+2010.2^{2009}\right)=1^2C_{2011}^1+2^2C_{2011}^2+3^2C_{2011}^3+2011^2C_{2011}^{2011}$$

Vậy $S=2011.2012.2^{2009}$

Bài 2 Cho n là số tự nhiên, $n\geq 2$ tính $S=\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k2^k=1^2.C_n^1.2+2^2C_n^2.2^2+3^2.C_n^3.2^3+\ldots+n^2C_n^n.2^n$

$$S=\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k2^k=1^2.C_n^1.2+2^2.C_n^2.2^2+\ldots+n^2.C_n^n.2^n$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)C_n^k2^k+\sum_{k=1}^{n}kC_n^k2^k$$

Xét khai triển

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k$$

+) $n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}kC_n^kx^{k-1}$, lấy x=2 ta được

$n.3^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} kC_n^k 2^{k-1} \Leftrightarrow 2n.3^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} kC_n^k 2^k$

+) $n(n-1)(1+x)^{n-2}=\sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k x^{k-2}$, lấy x=2 ta được

$n(n-1)3^{n-2}=\sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k 2^{k-2} \Leftrightarrow 4n(n-1)3^{n-2}=\sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k 2^k$

Vậy $S=n.3^{n-2}(2+4n)$

Bài 3 CMR $n \geq 2$, n nguyên dương $1^2C_n^1+2^2C_n^2+3^2C_n^3+...n^2C_n^n=n(n+1)2^{n-2}$

Bài 4 Tìm số nguyên dương *n* biết:

$2C_{2n+1}^2-3.2.2C_{2n+1}^3+....+(-1)^k k(k-1)2^{k-2}C_{2n+1}^k+....-2n(2n+1)2^{2n-1}C_{2n+1}^{2n+1}=-40200$

HD * Xét $(1-x)^{2n+1}=C_{2n+1}^0-C_{2n+1}^1x+C_{2n+1}^2x^2-....+(-1)^kC_{2n+1}^kx^k+....-C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$ (1)

- Lấy đạo hàm cả hai vế của (1) ta có:

  $-(2n+1)(1-x)^{2n}=-C_{2n+1}^1+2C_{2n+1}^2x-...+(-1)^k kC_{2n+1}^kx^{k-1}+....-(2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n}$ (2)

Lại lấy đạo hàm cả hai vế của (2) ta có:

$2n(2n+1)(1-x)^{2n-1}=2C_{2n+1}^2-3C_{2n+1}^3x+...+(-1)^k k(k-1)C_{2n+1}^kx^{k-2}+....-2n(2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n-1}$

Thay x = 2 vào đẳng thức trên ta có:

$-2n(2n+1)=2C_{2n+1}^2-3.2.2C_{2n+1}^3+...+(-1)^k k(k-1)2^{k-2}C_{2n+1}^k+...-2n(2n+1)2^{2n-1}C_{2n+1}^{2n+1}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2n(2n+1)=40200 \Leftrightarrow 2n^2+n-20100=0 \Leftrightarrow n=100$

Bài 5 Tính giá trị biểu thức sau:

$T=C_{2011}^1\frac{1}{2^{2010}}+2.C_{2011}^2.\frac{1}{2^{2008}}+3C_{2011}^3.\frac{1}{2^{2006}}+....................+2010.C_{2011}^{2010}.2^{2008}+2011.C_{2011}^{2011}.2^{2010}$

- HD Xét:

  $f(x)=(\frac{1}{2}+x)^{2011}=\sum_{i=0}^{2011}C_{2011}^i(\frac{1}{2})^{2011-i}.x^i=C_{2011}^0.\frac{1}{2^{2011}}+C_{2011}^1.\frac{1}{2^{2010}}.x^1+...+C_{2011}^k.\frac{1}{2^{2011-k}}.x^k+...+C_{2011}^{2011}.x^{2011}$

- Lấy đạo hàm của f(x) 2 vế ta được:

  $2011(\frac{1}{2}+x)^{2010}=C_{2011}^1.\frac{1}{2^{2010}}.1+...+k.C_{2011}^k.\frac{1}{2^{2011-k}}.x^{k-1}+...+2011.C_{2011}^{2011}.x^{2010}(*)$

Cho x = 2 vào 2 vế của (*) ta được $T=2011(\frac{1}{2}+2)^{2010}=2011.(\frac{5}{2})^{2010}$

Bài 6 Chứng minh rằng với $\forall n \in N^*$, ta có: $2C_{2n}^2+4C_{2n}^4+...+2nC_{2n}^{2n}=\frac{n}{2}4^n$.

Xét $(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+C_{2n}^3x^3+C_{2n}^4x^4+...+C_{2n}^{2n}x^{2n}$ (1)

$(1-x)^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2-C_{2n}^3x^3+C_{2n}^4x^4-...+C_{2n}^{2n}x^{2n}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow C_{2n}^0+C_{2n}^2x^2+C_{2n}^4x^4+...+C_{2n}^{2n}x^{2n}=\frac{(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}}{2}$

Lấy đạo hàm 2 vế ta được: $2C_{2n}^2x+4C_{2n}^4x^3+...+2nC_{2n}^{2n}x^{2n-1}=n\left[(1+x)^{2n-1}-(1-x)^{2n-1}\right]$

Với $x = 1$, ta được: $2C_{2n}^2 + 4C_{2n}^4 + ... + 2nC_{2n}^{2n} = n2^{2n-1} = \frac{n}{2}4^n$.

Bài 7 Tính tổng: $S = 2010C_{2008}^0 2^{2009} + 2009C_{2008}^1 2^{2008} + 2008C_{2008}^2 2^{2007} + ... + 3C_{2008}^{2007} 2^2 + 2C_{2008}^{2008} 2$

Bài 8 Khai triển $(1-5x)^{30} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{30}x^{30}$ Tính tổng $S = |a_0| + 2|a_1| + 3|a_2| + ... + 30|a_{30}|$

Xét khai triển: $(1-5x)^{30} = C_{30}^0 - C_{30}^1.5x + C_{30}^2.(5x)^2 - ... + C_{30}^{30}.(5x)^{30}$

Nhân 2 vế với x ta được:

$x(1-5x)^{30} = C_{30}^0 x - C_{30}^1.5x^2 + C_{30}^2.5^2x^3 - ... + C_{30}^{30}.5^{30}x^{31}$ (1)

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được;

$(1-5x)^{30} - 150x(1-5x)^{29} = C_{30}^0 - 2C_{30}^1.5x + 3C_{30}^2.5^2x^2 - ... + 31C_{30}^{30}.5^{30}x^{30}$ (2)

Chọn x=-1 thay vào (2) ta được

$6^{30} + 150.6^{29} = C_{30}^0 + 2(C_{30}^1.5) + 3(C_{30}^2.5^2) + ... + 31(C_{30}^{30}.5^{30})$

---

hay $6^{29}(6+150) = |a_0| + 2|a_1| + 3|a_2| + ... + 31|a_{30}|$

hay $6^{30}.26 = |a_0| + 2|a_1| + 3|a_2| + ... + 31|a_{30}|$

ĐS $: S = 6^{30}.26$

Bài 9 Áp dụng khai triển nhị thức Niutơn của $\left(x^2 + x\right)^{100}$, chứng minh rằng:

$$100C_{100}^0\left(\frac{1}{2}\right)^{99} - 101C_{100}^1\left(\frac{1}{2}\right)^{100} + \cdots - 199C_{100}^{99}\left(\frac{1}{2}\right)^{198} + 200C_{100}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{199} = 0.$$

Bài 10 Hãy tìm số tự nhiên n thoả mãn:

$$1.3^0.2^{2n}.C_{2n}^0 - 2.3.2^{2n-1}.C_{2n}^1 + 3.3^2.2^{2n-2}.C_{2n}^2 - 4.3^3.2^{2n-3}.C_{2n}^3 + ... + (2n+1).3^{2n}.2^0.C_{2n}^{2n} = 73$$

HD Ta cã $(2-x)^{2n} = 2^{2n}C_{2n}^0 - x.2^{2n-1}C_{2n}^1 + ... - x^{2n-1}.2^1C_{2n}^{2n-1} + x^{2n}.2^0C_{2n}^{2n}$ (1)

Nhân 2 vế của (1) với $x \neq 0$ được

$x(2-x)^{2n} = x2^{2n}C_{2n}^0 - x^2.2^{2n-1}C_{2n}^1 + ... - x^{2n}.2^1C_{2n}^{2n-1} + x^{2n+1}.2^0C_{2n}^{2n}$ (2)

Lấy đạo hàm 2 vế của (2) ta được

$(2-x)^{2n} - 2nx(2-x)^{2n-1} = 1.2^{2n}C_{2n}^0 - 2x2^{2n-1}C_{2n}^1 + ... - 2nx^{2n-1}2C_{2n}^{2n-1} +$

$+(2n+1)x^{2n}2^0C_{2n}^{2n}$ Thay x=3 vào được

$1 + 6n = 1.3^0.2^{2n}.C_{2n}^0 - 2.3.2^{2n-1}.C_{2n}^1 + 3.3^2.2^{2n-2}.C_{2n}^2 - 4.3^3.2^{2n-3}.C_{2n}^3 + ...$

$+(2n+1).3^{2n}.2^0.C_{2n}^{2n} = 73 \leftrightarrow 1 + 6n = 73 \leftrightarrow n = 12$

Bài 11. Hãy tìm số tự nhiên n thoả mãn:

$$C_{2n}^0 - 2.2^2C_{2n}^1 + 3.2^2C_{2n}^2 - ... - 2n.2^{2n-1}C_{2n}^{2n-1} + (2n+1).2^{2n}C_{2n}^{2n} = 2013$$

HD Ta có $(1-x)^{2n}=C_{2n}^{0}-xC_{2n}^{1}+x^2C_{2n}^{2}-...-x^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}+x^{2n}C_{2n}^{2n}\leftrightarrow$ nhân hai vế với x khác

$0\leftrightarrow x(1-x)^{2n}=xC_{2n}^{0}-x^2C_{2n}^{1}+x^3C_{2n}^{2}-...-x^{2n}C_{2n}^{2n-1}+x^{2n+1}C_{2n}^{2n}$

lấy đạo hàm hai vế được $(1-x)^{2n}-2nx(1-x)^{2n-1}=C_{2n}^{0}-2xC_{2n}^{1}+3x^2C_{2n}^{2}-...-$

$-2nx^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}+(2n+1)x^{2n}C_{2n}^{2n}(2)$

Thay x=2 vào 2 vế của (2) được $C_{2n}^{0}-2.2^2C_{2n}^{1}+3.2^2C_{2n}^{2}-...-2n.2^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}+(2n+1).2^{2n}C_{2n}^{2n}=1+4n$

Theo giả thiết 1+4n =2013 $\leftrightarrow n=2012:4=53$

Bài 12 Tìm số nguyên dương *n* biết:

$2C_{2n+1}^{2}-3.2.2C_{2n+1}^{3}+....+(-1)^k k(k-1)2^{k-2}C_{2n+1}^{k}+....-2n(2n+1)2^{2n-1}C_{2n+1}^{2n+1}=-40200$

HD Lại lấy đạo hàm cả hai vế của (2) ta có:

$2n(2n+1)(1-x)^{2n-1}=2C_{2n+1}^{2}-3C_{2n+1}^{3}x+...+(-1)^k k(k-1)C_{2n+1}^{k}x^{k-2}+....-2n(2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n-1}$

Thay x = 2 vào đẳng thức trên ta có:

$-2n(2n+1)=2C_{2n+1}^{2}-3.2.2C_{2n+1}^{3}+...+(-1)^k k(k-1)2^{k-2}C_{2n+1}^{k}+...-2n(2n+1)2^{2n-1}C_{2n+1}^{2n+1}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2n(2n+1)=40200\Leftrightarrow 2n^2+n-20100=0\Leftrightarrow n=100$

Bài 13 Tính tổng $S=2C_{2010}^{1}+6C_{2010}^{3}+10C_{2010}^{5}+...+4018C_{2010}^{2009}$.

Tính tổng $S=2C_{2012}^{1}-12C_{2012}^{3}+30C_{2012}^{5}-...+2009.2010C_{2012}^{2009}-2011.2012C_{2012}^{2011}$.

Tính tổng $S=C_{2011}^{0}+C_{2011}^{1}+\frac{3}{4}C_{2011}^{2}+\frac{1}{2}C_{2011}^{3}+...+\frac{2011}{2^{2010}}C_{2011}^{2010}+\frac{2012}{2^{2011}}C_{2011}^{2011}$

Bài 14 Tính tổng $S=C_{2011}^{0}+2C_{2011}^{1}+3C_{2011}^{2}+...+2012C_{2011}^{2011}$

HD Xét đa thức: $f(x)=x(1+x)^{2011}=x(C_{2011}^{0}+C_{2011}^{1}x+C_{2011}^{2}x^2+...+C_{2011}^{2011}x^{2011})$

$=C_{2011}^{0}x+C_{2011}^{1}x^2+C_{2011}^{2}x^3+...+C_{2011}^{2011}x^{2012}$.

Ta có: $f'(x)=C_{2011}^{0}+2C_{2011}^{1}x+3C_{2011}^{2}x^2+...+2012C_{2011}^{2011}x^{2011}$

$\Rightarrow f'(1)=C_{2011}^{0}+2C_{2011}^{1}+3C_{2011}^{2}+...+2012C_{2011}^{2011}\ (a)$

Mặt khác: $f'(x)=(1+x)^{2011}+2011(1+x)^{2010}.x=(1+x)^{2010}(1+2012x)$

$\Rightarrow f'(1)=2013.2^{2010}\qquad (b)$

Từ (a) và (b) suy ra: $S=2013.2^{2010}$.

Bài 14 Tính giá trị biểu thức: $A=4C_{100}^{2}+8C_{100}^{4}+12C_{100}^{6}+...+200C_{100}^{100}$.

Ta có: $(1+x)^{100}=C_{100}^{0}+C_{100}^{1}x+C_{100}^{2}x^2+...+C_{100}^{100}x^{100}\quad (1)$

$(1-x)^{100}=C_{100}^{0}-C_{100}^{1}x+C_{100}^{2}x^2-C_{100}^{3}x^3+...+C_{100}^{100}x^{100}\quad (2)$

Lấy (1)+(2) ta được:

$(1+x)^{100}+(1-x)^{100}=2C_{100}^{0}+2C_{100}^{2}x^2+2C_{100}^{4}x^4+...+2C_{100}^{100}x^{100}$

Lấy đạo hàm hai vế theo ẩn x ta được

$100(1+x)^{99}-100(1-x)^{99}=4C_{100}^{2}x+8C_{100}^{4}x^3+...+200C_{100}^{100}x^{99}$

Thay x=1 vào

=> $A=100.2^{99}=4C_{100}^{2}+8C_{100}^{4}+...+200C_{100}^{100}$

Bài 15 Áp dụng khai triển nhị thức Niutơn của $\left(x^2+x\right)^{100}$, chứng minh rằng:

$$100C_{100}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{99}-101C_{100}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}+\cdots-199C_{100}^{99}\left(\frac{1}{2}\right)^{198}+200C_{100}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{199}=0.$$

Bài 16 Hãy tìm số tự nhiên n thoả mãn:

$$1.3^0.2^{2n}.C_{2n}^{0}-2.3.2^{2n-1}.C_{2n}^{1}+3.3^2.2^{2n-2}.C_{2n}^{2}-4.3^3.2^{2n-3}.C_{2n}^{3}+......+(2n+1).3^{2n}.2^0.C_{2n}^{2n}=73$$

HD Ta cã $(2-x)^{2n}=2^{2n}C_{2n}^{0}-x.2^{2n-1}C_{2n}^{1}+...-x^{2n-1}.2^1C_{2n}^{2n-1}+x^{2n}.2^0C_{2n}^{2n}$ (1)

Nhân 2 vế của (1) với $x\neq 0$ được

$$x(2-x)^{2n}=x2^{2n}C_{2n}^{0}-x^2.2^{2n-1}C_{2n}^{1}+...-x^{2n}.2^1C_{2n}^{2n-1}+x^{2n+1}.2^0C_{2n}^{2n}\ (2)$$

Lấy đạo hàm 2 vế của (2) ta được

$$(2-x)^{2n}-2nx(2-x)^{2n-1}=1.2^{2n}C_{2n}^{0}-2x2^{2n-1}C_{2n}^{1}+.......-2nx^{2n-1}2C_{2n}^{2n-1}+$$

$+(2n+1)x^{2n}2^0C_{2n}^{2n}$ Thay x=3 vào được

$$1+6n=1.3^0.2^{2n}.C_{2n}^{0}-2.3.2^{2n-1}.C_{2n}^{1}+3.3^2.2^{2n-2}.C_{2n}^{2}-4.3^3.2^{2n-3}.C_{2n}^{3}+...$$
$$+(2n+1).3^{2n}.2^0.C_{2n}^{2n}=73\leftrightarrow 1+6n=73\leftrightarrow n=12$$

Bài 17 Hãy tìm số tự nhiên n thoả mãn:

$$C_{2n}^{0}-2.2^2C_{2n}^{1}+3.2^2C_{2n}^{2}-...-2n.2^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}+(2n+1).2^{2n}C_{2n}^{2n}=2013$$

HD Ta có $\left(1-x\right)^{2n}=C_{2n}^{0}-xC_{2n}^{1}+x^2C_{2n}^{2}-...-x^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}+x^{2n}C_{2n}^{2n}\leftrightarrow$ nhân hai vế với x khác

$0\leftrightarrow x\left(1-x\right)^{2n}=xC_{2n}^{0}-x^2C_{2n}^{1}+x^3C_{2n}^{2}-...-x^{2n}C_{2n}^{2n-1}+x^{2n+1}C_{2n}^{2n}$

lấy đạo hàm hai vế được

$$\left(1-x\right)^{2n}-2nx\left(1-x\right)^{2n-1}=C_{2n}^{0}-2xC_{2n}^{1}+3x^2C_{2n}^{2}-...-$$
$$-2nx^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}+(2n+1)x^{2n}C_{2n}^{2n}(2)$$

Thay x=2 vào 2 vế của (2) được $C_{2n}^{0}-2.2^2C_{2n}^{1}+3.2^2C_{2n}^{2}-...-2n.2^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}+(2n+1).2^{2n}C_{2n}^{2n}=1+4n$

Theo giả thiết 1+4n =2013 $\leftrightarrow n=2012:4=53$

Bài 18 Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^{1}-2.2C_{2n+1}^{2}+3.2^2C_{2n+1}^{3}-4.2^3C_{2n+1}^{4}+...+(2n+1).2^nC_{2n+1}^{2n+1}=2005$

HD ta cã $(1+x)^{2n+1}=C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}x+C_{2n+1}^{2}x^2+....+C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$

§¹o hµm hai vÕ ta cã $(2n+1)(1+x)^{2n+1}=C_{2n+1}^{0}+2C_{2n+1}^{1}x+3C_{2n+1}^{2}x^2+....+(2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n}$

Cho x=-2 ta ®-îc n=1002

Bài 19 DB_A1-2006 Ứng dụng khai triển nhị thức Newtơn của $\left(x^2+x\right)^{100}$, CMR

$$100C_{100}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{99}-101C_{100}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}+.....-199C_{100}^{99}\left(\frac{1}{2}\right)^{198}+200C_{100}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{199}=0$$

HD

2/ Ta có $(x+x^2)^{100}=C_{100}^{0}x^{100}+C_{100}^{1}x^{101}+C_{100}^{2}x^{102}+...+C_{100}^{100}x^{200}$ lấy đạo hàm hai vế, cho x= $-\frac{1}{2}$ và nhân hai vế cho (-1).Ta có kết quả:

$$100C_{100}^{0}(\frac{1}{2})^{99}-101C_{100}^{1}(\frac{1}{2})^{100}+...-199C_{100}^{99}(\frac{1}{2})^{198}+200C_{100}^{100}(\frac{1}{2})^{199}=0$$

Bài 20 DB_D1-2007 Chứng minh với mọi n nguyên dương luôn có

$$nC_n^0-(n-1)C_n^1+...+(-1)^{n-2}C_n^{n-2}+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}=0$$

HD Với mọi $n\in N$ ta có $(x-1)^n=C_n^0x^n-C_n^1x^{n-1}+...+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}x+(-1)^nC_n^n$

Lấy đạo hàm hai vế ta có $n(x-1)^{n-1}=nC_n^0x^{n-1}-(n-1)C_n^1x^{n-2}+...+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}$

Cho x = 1 ta có $0=nC_n^0-(n-1)C_n^1+...+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}$

Bài 21 Tính tổng $S=C_{100}^{1}+2.3.C_{100}^{2}+3.3^2.C_{100}^{3}+4.3^3.C_{100}^{4}+.......+100.3^{99}.C_{100}^{100}$

- Ta có, với mọi x,

$$(1+x)^{100}=C_{100}^{0}+xC_{100}^{1}+x^2C_{100}^{2}+\ldots+x^{100}C_{100}^{100}.$$

- Lấy đạo hàm hai vế đẳng thức trên, ta có

$$100(1+x)^{99}=C_{100}^{1}+2xC_{100}^{2}+3x^2C_{100}^{1}+\ldots+100x^{99}C_{100}^{100}.$$

- Thay $x=3$ vào đẳng thức trên, ta có

$$\begin{aligned}S&=C_{100}^{1}+2\times 3\times C_{100}^{2}+3\times 9\times C_{100}^{3}\\&\quad+4\times 27\times C_{100}^{4}+\ldots+100\times 3^{99}\times C_{100}^{100}\\&=100(1+3)^{99}=25.4^{100}.\end{aligned}$$

- Đáp số: $S=25.4^{100}$.

Bài 22 Chứng minh: $C_{2002}^{0}.C_{2002}^{2001}+C_{2002}^{1}.C_{2002}^{2000}+...+C_{2002}^{k}.C_{2002-k}^{2001-k}+...+C_{2002}^{2001}.C_{1}^{0}=1001.2^{2002}$

HD Ta có: $C_n^{n-1}=n$ do đó điều chứng minh trở thành:

$$2002.C_{2002}^{0}+2001.C_{2002}^{1}+......+1.C_{2002}^{2001}=10001.2^{2002}$$

Ta lại có: $(x+1)^{2002}=C_{2002}^{0}x^{2002}+C_{2002}^{1}x^{2001}+........+C_{2002}^{2001}x+C_{2002}^{2002}$

Lấy đạo hàm 2 vế ta được : $2002.(x+1)^{2001}=2002.C_{2002}^{0}x^{2001}+2001.C_{2002}^{1}.x^{2000}+....+1.C_{2002}^{2001}$

Cho x = 1 và lưu ý $2002.2^{2001}=1001.2^{2002}$ ta được điều phải chứng minh.

Bài 23 CMR $C_{2n}^{1}+3.2^2C_{2n}^{3}+........+(2k+1)2^{2k}C_{2n}^{2k+1}+....+(2n-1)2^{2n-2}C_{2n}^{2n-1}=n(3^{2n-1}-1)$

PHẦN B. Áp tích phân vào bài toán nhị thức NewTơn

Dấu hiệu nhận biết:

Các hệ số đứng trước tổ hợp (và lũy thừa) giảm dần từ 1 đến $\frac{1}{n+1}$ hoặc tăng dần từ $\frac{1}{n+1}$ đến 1.

Xét khai triển: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n \ (1)$

Lấy tích phân 2 vế của (1) từ a đến b ta được:

$$\int_a^b (1+x)^n\,dx = C_n^0\int_a^b dx + C_n^1\int_a^b xdx + ... + C_n^{n-1}\int_a^b x^{n-1}dx + C_n^n\int_a^b x^ndx$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = C_n^0\left.\frac{x}{1}\right|_a^b + C_n^1\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b + ... + C_n^{n-1}\left.\frac{x^n}{n}\right|_a^b + C_n^n\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{1}C_n^0 + \frac{b^2-a^2}{2}C_n^1 + ... + \frac{b^n-a^n}{n}C_n^{n-1} + \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{(1+b)^{n+1}-(1+a)^{n+1}}{n+1}$$

Trong thực hành, ta dễ dàng nhận biết giá trị của n.Để nhận biết 2 cận a và b ta nhìn vào số hạng $\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}C_n^n$.

Ví dụ 13. Rút gọn tổng $S = C_9^0 + \frac{3^2-2^2}{2}C_9^1 + \frac{3^3-2^3}{3}C_9^2 + ... + \frac{3^9-2^9}{9}C_9^8 + \frac{3^{10}-2^{10}}{10}C_9^9$.

Giải

Ta có khai triển:

$(1+x)^9 = C_9^0 + C_9^1x + C_9^2x^2 + ... + C_9^8x^8 + C_9^9x^9 \ (1)$

$$\Rightarrow \int_2^3 (1+x)^9\,dx = C_9^0\int_2^3 dx + C_9^1\int_2^3 xdx + ... + C_9^8\int_2^3 x^8dx + C_9^9\int_2^3 x^9dx$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{10}}{10}\right|_2^3 = C_9^0\left.\frac{x}{1}\right|_2^3 + C_9^1\left.\frac{x^2}{2}\right|_2^3 + C_9^2\left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3 + ... + C_9^8\left.\frac{x^9}{9}\right|_2^3 + C_9^9\left.\frac{x^{10}}{10}\right|_2^3$$

$$\Rightarrow \frac{4^{10}-3^{10}}{10} = C_9^0 + \frac{3^2-2^2}{2}C_9^1 + .. + \frac{3^9-2^9}{9}C_9^8 + \frac{3^{10}-2^{10}}{10}C_9^9.\text{Vậy } S = \frac{4^{10}-3^{10}}{10}.$$

Ví dụ 14. Rút gọn tổng $S = 2C_n^0 + \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + \frac{2^4}{4}C_n^3 + ... + \frac{2^n}{n}C_n^{n-1} + \frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n$.

Giải

Ta có khai triển:

$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + ... + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n$

$$\Rightarrow \int_0^2 (1+x)^n\,dx = C_n^0\int_0^2 dx + C_n^1\int_0^2 x\,dx + C_n^2\int_0^2 x^2dx + ... + C_n^n\int_0^2 x^n dx$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^2 = C_n^0\left.\frac{x}{1}\right|_0^2 + C_n^1\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 + ... + C_n^{n-1}\left.\frac{x^n}{n}\right|_0^2 + C_n^n\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^2$$

$$\Rightarrow 2C_n^0 + \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^n}{n}C_n^{n-1} + \frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}.\text{Vậy } S = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}.$$

Ví dụ 15. Rút gọn tổng sau:

$$S = 3C_{100}^0 + \frac{2^2-1}{2}C_{100}^1 + \frac{2^3+1}{3}C_{100}^2 + ... + \frac{2^{100}-1}{100}C_{100}^{99} + \frac{2^{101}+1}{101}C_{100}^{100}.$$

Giải

Ta có khai triển: $(1+x)^{100} = C_{100}^0 + C_{100}^1x + C_{100}^2x^2 + ... + C_{100}^{99}x^{99} + C_{100}^{100}x^{100}$

$$\Rightarrow \int_{-1}^2 (1+x)^{100}dx = C_{100}^0\int_{-1}^2 dx + C_{100}^1\int_{-1}^2 x\,dx + ... + C_{100}^{99}\int_{-1}^2 x^{99}dx + C_{100}^{100}\int_{-1}^2 x^{100}dx$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{101}}{101}\right|_{-1}^2 = C_{100}^0\left.\frac{x}{1}\right|_{-1}^2 + C_{100}^1\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^2 + ... + C_{100}^{99}\left.\frac{x^{100}}{100}\right|_{-1}^2 + C_{100}^{100}\left.\frac{x^{101}}{101}\right|_{-1}^2$$

$$\Rightarrow \frac{3^{101}}{101} = 3C_{100}^0 + \frac{2^2-1}{2}C_{100}^1 + ... + \frac{2^{100}-1}{100}C_{100}^{99} + \frac{2^{101}+1}{101}C_{100}^{100}.\text{Vậy } S = \frac{3^{101}}{101}.$$

Bài 1 Tìm số tự nhiên n thoả mãn: $C_n^0 + \frac{1}{2}.C_n^1 + \frac{1}{3}.C_n^2 + \frac{1}{4}.C_n^3 + ... + \frac{1}{n+1}.C_n^n = \frac{1023}{10}$

Xét khai triển: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^nx^n$

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^nx^n\right)dx$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \left.\left(C_n^0x + \frac{1}{2}C_n^1x^2 + \frac{1}{3}C_n^2x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^nx^{n+1}\right)\right|_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1023}{n+1}$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} - 1 = 1023 \Leftrightarrow 2^{n+1} = 1024 = 2^{10} \Leftrightarrow n+1 = 10 \Leftrightarrow n = 9 \quad \text{vậy } n = 9$$

Bài 2 Tìm hệ số a_4 của x^4 trong khai triển Niutơn đa thức $f(x) = (x^2+x+1)^n$ với n là số tự nhiên thỏa mãn: $3C_n^0 + \frac{3^2}{2}C_n^1 + \frac{3^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{3^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{4^{11}-1}{n+1}$.

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$$

Ta có: $\Rightarrow \int_0^3 (1+x)^n dx = C_n^0 \int_0^3 dx + C_n^1 \int_0^3 x dx + C_n^2 \int_0^3 x^2 dx + \ldots + C_n^2 \int_0^3 x^n dx$

$$\Leftrightarrow \frac{4^{n+1}-1}{n+1} = 3C_n^0 + \frac{C_n^1}{2}.3^2 + \frac{C_n^2}{3}.3^3 + \ldots + \frac{C_n^n}{3}.3^n$$

Từ giả thiết suy ra: $\frac{4^{n+1}-1}{n+1} = \frac{4^{11}-1}{n+1} \Leftrightarrow n = 10$

Tìm được số hạng tổng quát khi khai triển $f(x) = (x^2+x+1)^{10}$ là :

$C_{10}^k . C_k^m . x^{m+k}$

$(m, k \in N, 0 \le m \le k, 0 \le k \le 10)$

---

m + k = 4 $\Leftrightarrow m = 4-k$ mà $0 \le m \le k \Rightarrow 0 \le 4-k \le k \Leftrightarrow 2 \le k \le 4 \Rightarrow k = 2$ hoặc k = 3,hoặc k =4

$k = 2$ thì m = 2. k =3 thì m = 1, k= 4 thì m=0

Vậy hệ số của x^4 trong khai triển $f(x) = (x^2+x+1)^{10}$ là

$a_4 = C_{10}^2 . C_2^2 + C_{10}^3 . C_3^1 + C_{10}^4 . C_4^0 = 615.$

Bài 3 Tìm hệ số của x^{20} trong khai triển Newton của biểu thức $\left(\frac{2}{x^3} + x^5\right)^n$ biết rằng:

$$C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{13}$$

HD Theo Newton thì: $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n x^n = B$

Vì $\int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1}$, $\int_0^1 B dx = C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1}C_n^n \Rightarrow n+1 = 13 \Rightarrow n = 12$

Lại có: $(\frac{2}{x^3} + x^5)^n = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k . (\frac{2}{x^3})^{n-k} (x^5)^k$, $T_{k+1} = C_{12}^k . 2^{12-k} . x^{8k-36}$ Số hạng ứng với thoả mãn:

$8k - 36 = 20 \Leftrightarrow k = 7 \Rightarrow$ Hệ số của x^{20} là: $C_{12}^7 . 2^5 = 25344$

Bài 4 Tìm số tự nhiên n thoả mãn: $2.C_{2n}^0 + \frac{2}{3}.C_{2n}^2 + \frac{2}{5}.C_{2n}^4 + \frac{2}{7}.C_{2n}^6 + \ldots + \frac{2}{2n+1}.C_{2n}^{2n} = \frac{8192}{2n+1}$

$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} x^{2n}$

$(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 - \ldots + C_{2n}^{2n} x^{2n} \Rightarrow (1+x)^{2n} + (1-x)^{2n} = 2(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 x^2 + C_{2n}^4 x^4 + \ldots + C_{2n}^{2n} x^{2n})$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1+x)^{2n} dx + \int_0^1 (1-x)^{2n} dx = 2\int_0^1 (C_{2n}^0 + C_{2n}^2 x^2 + C_{2n}^4 x^4 + \ldots + C_{2n}^{2n} x^{2n}) dx$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1 - \left.\frac{(1-x)^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1 = 2\left(C_{2n}^0 x\Big|_0^1 + C_{2n}^2 \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \ldots + C_{2n}^{2n} \left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1 \right) \Leftrightarrow \frac{2^{2n+1}-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} = 2$$

$$(C_{2n}^0 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \ldots + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}) \Leftrightarrow \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = 2C_{2n}^0 + \frac{2}{3}C_{2n}^2 + \ldots + \frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n} \Leftrightarrow \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = \frac{8192}{2n+1} \Leftrightarrow n = 6$$

Bài 5 Tìm hệ số của số hạng chứa x^2 trong khai triển $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ biết n là số nguyên dương thoả mãn: $2.C_n^0+\frac{2^2}{2}.C_n^1+\frac{2^3}{3}.C_n^2+...+\frac{2^{n+1}}{n+1}.C_n^n=\frac{6560}{n+1}$

HD Ta có $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+...+C_n^nx^n$

$$\Rightarrow\int_0^2(1+x)^n\,dx=\int_0^2\left(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+...+C_n^nx^n\right)dx\Leftrightarrow\left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^2$$

$$=C_n^0x\Big|_0^2+C_n^1\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2+C_n^2\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2+...+C_n^n\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^2\Leftrightarrow\frac{3^{n+1}-1}{n+1}=2\ C_n^0+\frac{2^2}{2}C_n^1+\frac{2^3}{3}C_n^2+...+\frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n$$

$$\Leftrightarrow\frac{3^{n+1}-1}{n+1}=\frac{6560}{n+1}\Leftrightarrow3^{n+1}=6561\Leftrightarrow n=7\Rightarrow\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^7=\sum_{k=0}^{7}\frac{1}{2^k}.C_7^k.x^{\frac{14-3k}{4}}$$

Theo bài ra $\Rightarrow\frac{14-3k}{4}=2\Leftrightarrow k=2$ Vậy hệ số cần tìm là $\frac{1}{2^2}.C_7^2=\frac{21}{4}$

Bài 6 Tìm a và n nguyên dương thỏa : $aC_n^0+\frac{a^2}{2}C_n^1+\frac{a^3}{3}C_n^2+......+\frac{a^{n+1}}{(n+1)}C_n^n=\frac{127}{7}$ và $A_n^3=20n$.

: $A_n^3=20n\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)=20n\Leftrightarrow n^2-3n-18=0\Leftrightarrow$ n = 6 và n = – 3 (loại)

Khi đó: $a.C_6^0+\frac{a^2}{2}.C_6^1+....+\frac{a^7}{7}C_6^6=\frac{127}{7}$

Ta có : $(1+x)^6=C_6^0+C_6^1x+C_6^2x^2+C_6^3x^3+C_6^4x^4+C_6^5x^5+C_6^6x^6$

Nên $\int_0^a(1+x)^6dx=C_6^0\left[x\right]_0^a+C_6^1\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a+...+C_6^6\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^a\Leftrightarrow\left[\frac{(1+x)^7}{7}\right]_0^a=a.C_6^0+\frac{a^2}{2}.C_6^1+....+\frac{a^7}{7}C_6^6$

$$\Leftrightarrow\frac{(1+a)^7}{7}-\frac{1}{7}=\frac{127}{7}\Rightarrow(1+a)^7=128\Rightarrow(1+a)^7=2^7\Leftrightarrow a=1$$

Vậy a = 1 và n = 6 .

Bài 7 Tính tổng : $S=\frac{2^2-1}{2}.C_{2010}^1+\frac{2^4-1}{4}.C_{2010}^3+\frac{2^6-1}{6}.C_{2010}^5+...+\frac{2^{2010}-1}{2010}.C_{2010}^{2009}$

Tacó $(1+x)^{2010}=\sum_{k=0}^{2010}C_{2010}^Kx^k=C_{2010}^0+C_{2010}^1.x^1+C_{2010}^2.x^2+C_{2010}^3.x^3+...+C_{2010}^{2009}.x^{2009}+C_{2010}^{2010}.x^{2010}$

$$(1-x)^{2010}=\sum_{k=0}^{2010}C_{2010}^k.(-x)^k=C_{2010}^0-C_{2010}^1.x^1+C_{2010}^2.x^2-C_{2010}^3.x^3+...-C_{2010}^{2009}.x^{2009}+C_{2010}^{2010}.x^{2010}$$

$$\Rightarrow\frac{(1+x)^{2010}-(1-x)^{2010}}{2}=C_{2010}^1x+C_{2010}^3x^3+C_{2010}^5.x^5+...+C_{2010}^{2009}.x^{2009}$$

Lấy tích phân 2 vế của (1) với cận từ 1 đến 2 ta được:

$$\int_1^2\frac{(1+x)^{2010}-(1-x)^{2010}}{2}.dx=\int_1^2\left(C_{2010}^1x+C_{2010}^3x^3+C_{2010}^5x^5+...+C_{2010}^{2009}x^{2009}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\frac{(1+x)^{2011}}{2011}+\frac{(1-x)^{2011}}{2011}}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{1}{2}C_{2010}^1x^2+\frac{1}{4}C_{2010}^3x^4+...+\frac{1}{2010}C_{2010}^{2009}x^{2010}\right)\Bigg|_1^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{2011}-1-2^{2011}}{4022}=\frac{2^2-1}{2}C_{2010}^1+\frac{2^4-1}{4}C_{2010}^3+...+\frac{2^{2010}-1}{2010}C_{2010}^{2009}.\text{Vậy: } S=\frac{3^{2011}-2^{2011}-1}{4022}$$

Bài 8 Chứng minh đẳng thức sau: $C_{2012}^1+3C_{2012}^3+\cdots+2011C_{2012}^{2011}=2C_{2012}^2+4C_{2012}^4+\cdots+2012C_{2012}^{2012}$

Bài 9 Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng : $2C_n^0+\frac{2^2}{2}C_n^1+\frac{2^3}{3}C_n^2+...+\frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$

HD Xét khai triển $\left(1+x\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k$ (1)

Lấy tích phân hai vế của (1) ta có: $\int_0^2(1+x)^n dx=\int_0^2\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k \Leftrightarrow \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^2=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{x^{k+1}}{k+1}\Bigg|_0^2$

Từ đó dẫn tới : $2C_n^0+\frac{2^2}{2}C_n^1+\frac{2^3}{3}C_n^2+...+\frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$ (Đpcm)

Bài 10 Tìm m, n thỏa mãn: $C_n^1+6C_n^2+6C_n^3=9n^2-14n$ và $mC_n^0+\frac{m^2}{2}C_n^1+\frac{m^3}{3}C_n^2+\frac{m^4}{4}C_n^3+...+\frac{m^{n+1}}{n+1}C_n^n=\frac{255}{8}$

HD Giải phương trình $C_n^1+6C_n^2+6C_n^3=9n^2-14n$ tìm được n = 7

$$mC_7^0+\frac{m^2}{2}C_7^1+\frac{m^3}{3}C_7^2+\frac{m^4}{4}C_7^3+...+\frac{m^8}{8}C_7^7=\frac{255}{8}=\int_1^m(1+x)^7dx \Leftrightarrow \frac{(1+x)^8}{8}\Big|_1^m=\frac{255}{8}\Leftrightarrow\frac{(1+m)^8}{8}=\frac{256}{8}$$

$$\Leftrightarrow m=1, m=-3$$

Bài 11 Tìm số nguyên dương n sao cho thoả mãn $C_n^0+\frac{2}{2}C_n^1+\frac{2^2}{3}C_n^2+...+\frac{2^n}{n+1}C_n^n=\frac{121}{n+1}$

Xét khai triển $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$

Lấy tích phân 2 vế cân từ 0 đến 2 , ta được: $\frac{3^{n+1}-1}{n+1}=2C_n^0+\frac{2^2}{2}C_n^1+\frac{2^3}{3}C_n^3+...+\frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n \Leftrightarrow$

$C_n^0+\frac{2}{2}C_n^1+\frac{2^2}{3}C_n^2+...+\frac{2^n}{n+1}C_n^n=\frac{3^{n+1}-1}{2(n+1)}\Leftrightarrow\frac{121}{n+1}=\frac{3^{n+1}-1}{2(n+1)}$ Vậy n=4.

$\Leftrightarrow 3^{n+1}=243\Leftrightarrow n=4$

Bài 12 Tìm m, n thỏa mãn: $C_n^1+6C_n^2+6C_n^3=9n^2-14n$ và $mC_n^0+\frac{m^2}{2}C_n^1+\frac{m^3}{3}C_n^2+\frac{m^4}{4}C_n^3+...+\frac{m^{n+1}}{n+1}C_n^n=\frac{255}{8}$

HD Giải phương trình $C_n^1+6C_n^2+6C_n^3=9n^2-14n$ tìm được n = 7

$$mC_7^0+\frac{m^2}{2}C_7^1+\frac{m^3}{3}C_7^2+\frac{m^4}{4}C_7^3+...+\frac{m^8}{8}C_7^7=\frac{255}{8}=\int_1^m(1+x)^7dx \Leftrightarrow \frac{(1+x)^8}{8}\Big|_1^m=\frac{255}{8}\Leftrightarrow\frac{(1+m)^8}{8}=\frac{256}{8}\Leftrightarrow m=1$$

Bài 13 KB – 2003 Cho n là số nguyên dương. Tính tổng $C_n^0+\frac{2^2-1}{2}C_n^1+\frac{2^3-1}{3}C_n^2+...+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$.

Suy ra $\int_1^2 (1+x)^n dx = \int_1^2 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n \right) dx$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_1^2 = \left(C_n^0 x + C_n^1 \frac{x^2}{2} + C_n^2 \frac{x^3}{3} + ... + C_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)\Bigg|_1^2$$

$$\Leftrightarrow C_n^0 + \frac{2^2-1}{2} C_n^1 + \frac{2^3-1}{3} C_n^2 + \cdots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1} C_n^n = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}.$$

Bài 14 KA-2007 CMR $\frac{1}{2} C_{2n}{}^{1} + \frac{1}{4} C_{2n}{}^{3} + \frac{1}{6} C_{2n}{}^{5} + ... + \frac{1}{2n} C_{2n}{}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$

Ta có: $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + ... + C_{2n}^{2n} x^{2n}$, $(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + ... + C_{2n}^{2n} x^{2n}$

$$\Rightarrow (1+x)^{2n} - (1-x)^{2n} = 2\left(C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + C_{2n}^5 x^5 + ... + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} \right).$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2} dx = \int_0^1 \left(C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + C_{2n}^5 x^5 + ... + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} \right) dx$$

- $\int_0^1 \frac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2} dx = \frac{(1+x)^{2n+1} + (1-x)^{2n+1}}{2(2n+1)}\Bigg|_0^1 = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$ (1)
- $\int_0^1 \left(C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + C_{2n}^5 x^5 + ... + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} \right) dx$

$$= \left(C_{2n}^1 . \frac{x^2}{2} + C_{2n}^3 . \frac{x^4}{4} + C_{2n}^5 . \frac{x^6}{6} + ... + C_{2n}^{2n-1} . \frac{x^{2n}}{2n} \right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} C_{2n}^1 + \frac{1}{4} C_{2n}^3 + \frac{1}{6} C_{2n}^5 ... + \frac{1}{2n} C_{2n}^{2n-1} \qquad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Bài 15 Rút gọn tổng $S = \frac{2^{2n+1}}{n+1} C_n^0 + \frac{2^{2n-1}}{n} C_n^1 + \frac{2^{2n-3}}{n-1} C_n^2 + ... + \frac{2^3}{2} C_n^{n-1} + \frac{2^1}{1} C_n^n$.

HD: $(2x+1)^n = C_n^0 2^n x^n + C_n^1 2^{n-1} x^{n-1} + C_n^2 2^{n-2} x^{n-2} + ... + C_n^{n-1} 2x + C_n^n$

$$\Rightarrow \int_0^2 (2x+1)^n dx = 2^n C_n^0 \int_0^2 x^n dx + 2^{n-1} C_n^1 \int_0^2 x^{n-1} dx + 2^{n-2} C_n^2 \int_0^2 x^{n-2} dx + ... + 2C_n^{n-1} \int_0^2 x dx + C_n^n \int_0^2 dx$$

$$\Rightarrow \frac{(2x+1)^{n+1}}{2(n+1)}\Bigg|_0^2 = 2^n C_n^0 \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^2 + 2^{n-1} C_n^1 \frac{x^n}{n}\Bigg|_0^2 + 2^{n-2} C_n^2 \frac{x^{n-1}}{n-1}\Bigg|_0^2 + ... + 2C_n^{n-1} \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 + C_n^n x\Big|_0^2$$

Rút gọn tổng $S = \frac{2^{2n+1}}{n+1} C_n^0 + \frac{2^{2n-1}}{n} C_n^1 + \frac{2^{2n-3}}{n-1} C_n^2 + ... + \frac{2^3}{2} C_n^{n-1} + \frac{2^1}{1} C_n^n$.

Bài 16 Rút gọn tổng:

$$S=\frac{1}{100}\left(C_{100}^{1}\right)^2+\frac{2}{99}\left(C_{100}^{2}\right)^2+\frac{3}{98}\left(C_{100}^{3}\right)^2+\frac{4}{97}\left(C_{100}^{4}\right)^2+...+\frac{99}{2}\left(C_{100}^{99}\right)^2+100\left(C_{100}^{100}\right)^2$$

HD . Ta có: $(1+x)^{100}=C_{100}^{0}+C_{100}^{1}x+C_{100}^{2}x^2+C_{100}^{3}x^3+...+C_{100}^{99}x^{99}+C_{100}^{100}x^{100}$

$\Rightarrow 100(1+x)^{99}=C_{100}^{1}+2C_{100}^{2}x+3C_{100}^{3}x^2+...+99C_{100}^{99}x^{98}+100C_{100}^{100}x^{99}$ (1).

$(x+1)^{100}=C_{100}^{0}x^{100}+C_{100}^{1}x^{99}+C_{100}^{2}x^{98}+...+C_{100}^{99}x+C_{100}^{100}$

$\Rightarrow \int(x+1)^{100}dx=C_{100}^{0}\int x^{100}dx+C_{100}^{1}\int x^{99}dx+C_{100}^{2}\int x^{98}dx+...+C_{100}^{99}\int xdx+C_{100}^{100}\int dx$

$\Rightarrow \dfrac{(x+1)^{101}}{101}+C=C_{100}^{0}\dfrac{x^{101}}{101}+C_{100}^{1}\dfrac{x^{100}}{100}+C_{100}^{2}\dfrac{x^{99}}{99}+...+C_{100}^{99}\dfrac{x^2}{2}+C_{100}^{100}x$ (2).

Nhân (1) và (2) ta được: $\dfrac{100}{101}(1+x)^{200}+100C(1+x)^{99}=$

$=\left(C_{100}^{1}+2C_{100}^{2}x+3C_{100}^{3}x^2+...+100C_{100}^{100}x^{99}\right)\left(C_{100}^{0}\dfrac{x^{101}}{101}+C_{100}^{1}\dfrac{x^{100}}{100}+C_{100}^{2}\dfrac{x^{99}}{99}+...+C_{100}^{100}x\right)$ (3).

Nhân phân phối vế phải (3) và cân bằng hệ số x^{100} ta được: $S=\dfrac{100}{101}C_{200}^{100}$.

Bài 17 Với mỗi số tự nhiên n hãy tính tổng: $S=C_n^0.2^n+\dfrac{1}{2}C_n^1.2^{n-1}+\dfrac{1}{3}C_n^2.2^{n-2}+...+\dfrac{1}{n+1}C_n^n$.

PHẦN C. Áp dụng số phức vào bài toán nhị thức NewTơn

Bài 1 Tính tổng: $S=C_{2009}^0+C_{2009}^4+C_{2009}^8+...+C_{2009}^{2004}+C_{2009}^{2008}$

Ta có: $(1+i)^{2009}=C_{2009}^0+iC_{2009}^1+..+i^{2009}C_{2009}^{2009}$

$C_{2009}^0-C_{2009}^2+C_{2009}^4-C_{2009}^6+....-C_{2009}^{2006}+C_{2009}^{2008}+$

$(C_{2009}^1-C_{2009}^3+C_{2009}^5-C_{2009}^7+...-C_{2009}^{2007}+C_{2009}^{2009})i$

Thấy: $S=\dfrac{1}{2}(A+B)$, với $A=C_{2009}^0-C_{2009}^2+C_{2009}^4-C_{2009}^6+....-C_{2009}^{2006}+C_{2009}^{2008}$

$B=C_{2009}^0+C_{2009}^2+C_{2009}^4+C_{2009}^6+...C_{2009}^{2006}+C_{2009}^{2008}$

+ Ta có: $(1+i)^{2009}=(1+i)[(1+i)^2]^{1004}=(1+i).2^{1004}=2^{1004}+2^{1004}i$.

Đồng nhất thức ta có A chớnh là phần thực của $(1+i)^{2009}$ nờn $A=2^{1004}$.

+ Ta có: $(1+x)^{2009}=C_{2009}^0+xC_{2009}^1+x^2C_{2009}^2+...+x^{2009}C_{2009}^{2009}$

Cho x=-1 ta có: $C_{2009}^0+C_{2009}^2+...+C_{2009}^{2008}=C_{2009}^1+C_{2009}^3+...+C_{2009}^{2009}$

Cho x=1 ta có: $(C_{2009}^0+C_{2009}^2+...+C_{2009}^{2008})+(C_{2009}^1+C_{2009}^3+...+C_{2009}^{2009})=2^{2009}$.

Suy ra: $B=2^{2008}$.

+ Từ đó ta có: $S=2^{1003}+2^{2007}$.

Bài 2 Chứng minh rằng $C_{100}^0-C_{100}^2+C_{100}^4-...+C_{100}^{100}=-2^{50}$.

Ta có

$$\left(1+i\right)^{100}=C_{100}^0+C_{100}^1i+C_{100}^2i^2+...+C_{100}^{100}i^{100}=\left(C_{100}^0-C_{100}^2+C_{100}^4-...+C_{100}^{100}\right)+\left(C_{100}^1-C_{100}^3+...-C_{100}^{99}\right)i$$

Mặt khác

$\left(1+i\right)^2=1+2i+i^2=2i\Rightarrow\left(1+i\right)^{100}=\left(2i\right)^{50}=-2^{50}$ Vậy $C_{100}^0-C_{100}^2+C_{100}^4-...+C_{100}^{100}=-2^{50}$.

Bài 3 Tính tổng: $S=C_{2011}^1-C_{2011}^3+C_{2011}^5-C_{2011}^7+...+C_{2011}^{2009}-C_{2011}^{2011}$

Xét khai triển $(1+i)^{2011}=C_{2011}^{0}+C_{2011}^{1}i+C_{2011}^{2}i^{2}+C_{2011}^{3}i^{3}+...+C_{2011}^{2011}i^{2011}$

do $i^{4k}=1, i^{4k+1}=i, i^{4k+2}=-1, i^{4k+3}=-i, \forall k\in$ □ do đó ta có

$$(1+i)^{2011}=\left(C_{2011}^{0}-C_{2011}^{2}+C_{2011}^{4}-...-C_{2011}^{2010}\right)+\left(C_{2011}^{1}-C_{2011}^{3}+C_{2011}^{5}-...-C_{2011}^{2011}\right)i \quad (1)$$

mặt khác $(1+i)^{2011}=\left[(1+i)^{2}\right]^{1005}(1+i)=(2i)^{1005}(1+i)=-2^{1005}+2^{1005}i \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta được: $S=C_{2011}^{1}-C_{2011}^{3}+C_{2011}^{5}-C_{2011}^{7}+\cdots+C_{2011}^{2009}-C_{2011}^{2011}=2^{1005}$

I. Chứng minh đẳng thức nhờ Nhị thức New tơn

Bài 1 Chứng minh: $C_{10}^{0}.C_{20}^{10}+C_{10}^{1}.C_{20}^{9}+...+C_{10}^{9}.C_{20}^{1}+C_{10}^{10}.C_{20}^{0}=C_{30}^{10}$.

Ta có $(1+x)^{30}=(1+x)^{10}.(1+x)^{20}, \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

Mặt khác: $(1+x)^{30}=\sum_{k=1}^{n}C_{30}^{k}.x^{k}, \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy hệ số a_{10} của x^{10} trong khai triển của $(1+x)^{30}$ là $a_{10}=C_{30}^{10}$.

Do (1) đúng với mọi x nên $a_{10}=b_{10}$. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2 Chứng minh rằng: $\frac{1}{C_{2011}^{1}}+\frac{1}{C_{2011}^{2}}+...+\frac{1}{C_{2011}^{2011}}=\frac{1006}{2011}\left(\frac{1}{C_{2010}^{0}}+\frac{1}{C_{2010}^{1}}+...+\frac{1}{C_{2010}^{2010}}\right)$

Bài 3 Chứng minh rằng: $2C_{2n}^{2}+4C_{2n}^{4}+....+2nC_{2n}^{2n}=\frac{n}{2}4^{n}$ n nguyên dương

Bài 4 Chứng minh: $5^{n}\left(C_{n}^{0}+\frac{1}{5}C_{n}^{1}+\frac{1}{5^{2}}C_{n}^{2}+...+\frac{1}{5^{n}}C_{n}^{n}\right)=6^{n}$

HD Ta có: $(1)\Leftrightarrow 5^{n}C_{n}^{o}+5^{n-1}C_{n}^{1}+5^{n-2}C_{n}^{2}+..+C_{n}^{n}=6^{n}$

$(1+x)^{n}=C_{n}^{0}x^{n}+C_{n}^{1}x^{n-1}+....+C_{n}^{n-1}x+C_{n}^{n}$ Cho x=5

$5^{n}C_{n}^{o}+5^{n-1}C_{n}^{1}+5^{n-2}C_{n}^{2}+..+C_{n}^{n}=6^{n}$

Bài 5 Chứng minh rằng $C_{2011}^{0}+\frac{1}{3}C_{2011}^{2}+\frac{1}{5}C_{2011}^{4}+...+\frac{1}{2011}C_{2011}^{2010}=\frac{2^{2011}}{2012}$.

Bài 6 Tính tổng $T=\frac{2}{3}C_{100}^{1}+\frac{4}{3^{3}}C_{100}^{2}+..+\frac{2k}{3^{2k-1}}C_{100}^{k}+...+\frac{200}{3^{199}}C_{100}^{100}$.

Tính tổng $S=C_{2011}^{0}+C_{2011}^{1}+\frac{3}{4}C_{2011}^{2}+\frac{1}{2}C_{2011}^{3}+...+\frac{2011}{2^{2010}}C_{2011}^{2010}+\frac{2012}{2^{2011}}C_{2011}^{2011}$

Tính tổng $S=2C_{2012}^{1}-12C_{2012}^{3}+30C_{2012}^{5}-...+2009.2010C_{2012}^{2009}-2011.2012C_{2012}^{2011}$.

Bài 7 Tính: $\mathrm{A}=\frac{2^{0}C_{2010}^{0}}{1}-\frac{2^{1}C_{2010}^{1}}{2}+\frac{2^{2}C_{2010}^{2}}{3}-\frac{2^{3}C_{2010}^{3}}{4}+...+\frac{2^{2010}C_{2010}^{2010}}{2011}$

Ta có:

$$(-1)^{k}\frac{2^{k}C_{2010}^{k}}{(k+1)}=\frac{(-2)^{k}2010!}{k!(2010-k)!(k+1)}=\frac{(-2)^{k}2010!}{(k+1)!(2010-k)!}=\frac{1}{2011}\cdot\frac{(-2)^{k}2011!}{(k+1)!(2011-k-1)!}=-\frac{1}{4022}\cdot(-2)^{k+1}C_{2011}^{k+1}$$

$$\Rightarrow A=-\frac{1}{4022}\cdot\left[(-2)^{1}C_{2011}^{1}+(-2)^{2}C_{2011}^{2}+...+(-2)^{2011}C_{2011}^{2011}\right]=-\frac{1}{4022}\cdot\left[(-2+1)^{2011}-(-2)^{0}C_{2011}^{0}\right]=\frac{1}{2011}$$

Bài 8 Tìm số nguyên dương n; biết khai triển P(x) = $(5 + 2x + 5x^2 + 2x^3)^n$ thành đa thức thì hệ số của x^3 bằng 458

HD P(x) $= [5 + 2x + 5x^2 + 2x^3]^n = (1 + x^2)^n(5 + 2x)^n$

Hệ số x^3: $C_n^0 C_n^3 5^{n-3}2^3 + C_n^1 C_n^1 5^{n-1}.2 = 5^{n-2}.2(4C_n^3 + 25n^2) = 458 \Longrightarrow n = 3$

Bài 9 Tìm số hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển $\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, biết rằng $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 4n + 6$.

Giải phương trình $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 4n + 6$; **Điều kiện**: $n \geq 2$; $n \in N$.

Phương trình tương đương với $n(n-1) - \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = 4n + 6 \Leftrightarrow n(n-1) - \frac{n(n+1)}{2} = 4n + 6$

$\Leftrightarrow n^2 - 11n - 12 = 0 \Leftrightarrow n = -1$ (Loại) hoặc $n = 12$.

Với n = 12 ta có nhị thức Niutơn: $\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12} = \sum_{k=1}^{12} C_{12}^k (2x)^{12-k}.x^{-\frac{k}{2}} = \sum_{k=1}^{12} C_{12}^k.2^{12-k}.x^{\frac{24-3k}{2}}$

Số hạng này chứa x^6 khi $\begin{cases} k \in N, \ 0 \leq k \leq 12 \\ 24 - 3k = 12 \end{cases} \Leftrightarrow k = 4$. Vậy hệ số của số hạng chứa x^6 là: $C_{12}^4 2^8$

Bài 1 Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{2}{3}C_{100}^1 + \frac{4}{3^3}C_{100}^2 + ... + \frac{2k}{3^{2k-1}}C_{100}^k + ... + \frac{200}{3^{999}}C_{100}^{100}$.

Bài Cho khai triển $\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3}\right)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Tìm số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ biết rằng n là số tự nhiên thỏa mãn $C_n^2 C_n^{n-2} + 2C_n^{n-2}C_n^{n-1} + C_n^1 C_n^{n-1} = 11025$.

HD Ta có $C_n^2 C_n^{n-2} + 2C_n^{n-2}C_n^{n-1} + C_n^1 C_n^{n-1} = 11025 \Leftrightarrow (C_n^2 + C_n^1)^2 = 105^2$

$C_n^2 + C_n^1 = 105 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} + n = 105 \Leftrightarrow n^2 + n - 210 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 14 \\ n = -15 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Ta có khai triển $\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3}\right)^{14} = \sum_{k=0}^{14} C_{14}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{14-k}\left(\frac{x}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{14} C_{14}^k 2^{k-14}.3^{-k}.x^k$

Do đó $a_k = C_{14}^k 2^{k-14}.3^{-k}$

Ta xét tỉ số $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{C_{14}^{k+1}2^{k-13}3^{-k-1}}{C_{14}^k 2^{k-14}3^{-k}} = \frac{2(14-k)}{3(k+1)}.\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \Leftrightarrow \frac{2(14-k)}{3(k+1)} > 1 \Leftrightarrow k < 5$. Do $k \in \mathbb{N}$, nên $k \leq 4$.

Tương tự $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \Leftrightarrow k > 5, \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 \Leftrightarrow k = 5$ Do đó $a_0 < a_1 < ... < a_4 < a_5 = a_6 > a_7 > ... > a_{14}$

Do đó a_5 và a_6 là hai hệ số lớn nhấtVậy hệ số lớn nhất là $a_5 = a_6 = C_{14}^5 2^{-9}3^{-5} = \frac{1001}{62208}$

Bài Tính giá trị biểu thức A = $\frac{2^0 C_{2011}^0}{1} - \frac{2^1 C_{2011}^1}{2} + \frac{2^2 C_{2011}^2}{3} - \frac{2^3 C_{2011}^3}{4} + ...- \frac{2^{2011} C_{2011}^{2011}}{2012}$

Ta có $(-1)^k \frac{2^k.C_{2011}^k}{k+1} = \frac{(-2)^k.2011!}{(k+1).k!.(2011-k)!} = \frac{(-2)^k.2011!}{(k+1)!.(2011-k)!} = \frac{(-2)^k.2012!}{2012(k+1)!.(2012-k-1)!} = -$

$\frac{1}{2012}.(-2)^k.C_{2012}^{k+1} == -\frac{1}{4024}.(-2)^{k+1}.C_{2012}^{k+1}$

Với k = 0, 1, 2, …….., 2011 ta có:

$$A = -\frac{1}{4024}.\left[(-2)^1 C_{202}^1 + (-2)^2 C_{2012}^2 + ...+(-2)^{2012} C_{2012}^{2012}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4024}.\left[(-2)^0 C_{2012}^0 + (-2)^1 C_{202}^1 + (-2)^2 C_{2012}^2 + ...+(-2)^{2012} C_{2012}^{2012} - (-2)^0 C_{2012}^0\right] =$$

$$= -\frac{1}{4024}.\left[(-2+1)^{2012} - (-2)^0 C_{2012}^0\right] = -\frac{1}{4024}.\left[1-1\right] = 0$$ Vậy A = 0

Bài Tính tổng: $S = \frac{1}{2!2007!} + \frac{1}{4!2005!} + \frac{1}{6!2003!} + ... + \frac{1}{2006!3!} + \frac{1}{2008!1!}$

Ta có: $2009!S = \frac{2009!}{2!2007!} + \frac{2009!}{4!2005!} + \frac{2009!}{6!2003!} + ... + \frac{2009!}{2006!3!} + \frac{2009!}{2008!1!}$

$$= C_{2009}^2 + C_{2009}^4 + C_{2009}^6 + ... + C_{2009}^{2006} + C_{2009}^{2008}$$

Bằng cách khai triển $(1+x)^{2009}$ và chọn x= -1, ta được đẳng thức

….

Chọn x=1, ta được đẳng thức: . . .

Từ đó suy ra: $S = \frac{2^{2008}-1}{2009!}$ (Các đề theo hình thức tự luận)

Bài Tính: $$A = \frac{2^0 C_{2010}^0}{1.2} - \frac{2^1 C_{2010}^1}{2.3} + \frac{2^2 C_{2010}^2}{3.4} - \frac{2^3 C_{2010}^3}{4.5} + ... + \frac{2^{2010} C_{2010}^{2010}}{2011.2012}$$

HD Ta có:

$$(-1)^k \frac{2^k C_{2010}^k}{(k+1)} = \frac{(-2)^k 2010!}{k!(2010-k)!(k+1)} = \frac{(-2)^k 2010!}{(k+1)!(2010-k)!}$$

$$= \frac{1}{2011}\cdot\frac{(-2)^k 2011!}{(k+1)!(2011-k-1)!} = -\frac{1}{4022}\cdot(-2)^{k+1} C_{2011}^{k+1}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{4022}\cdot\left[(-2)^1 C_{2011}^1 + (-2)^2 C_{2011}^2 + ... + (-2)^{2011} C_{2011}^{2011}\right]$$

$$= -\frac{1}{4022}\cdot\left[(-2+1)^{2011} - (-2)^0 C_{2011}^0\right] = \frac{1}{2011}$$